

1. Principiul lui Dirichlet

Principiul lui Dirichlet:

Fie A o mulțime nevidă și A_1, A_2, \dots, A_n o partiție a lui A (adică

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ pentru } i \neq j, A_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n).$$

Dacă considerăm a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , $n+1$ elemente din A , atunci există cel puțin o submulțime A_i care să conțină cel puțin două elemente dintre cele $n+1$.

1. Arătați că oricum am alege 7 numere întregi, două dintre ele dau la împărțirea cu 6 același rest.

Soluție: Folosind teorema împărțirii cu rest, putem scrie orice număr întreg n sub forma $n = 6q + r$, unde q este număr întreg și restul $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Fiind 6 valori posibile pentru cele 7 resturi provenite din împărțirea numerelor din ipoteză la 6, cel puțin două resturi trebuie să fie egale.

2. Se consideră 10 numere naturale distincte. Dintre pătratele lor se alege 7. Arătați că cel puțin două dintre ele au diferența divizibilă cu 10.

Soluție: Știm că ultima cifră a pătratul unui număr natural n poate fi $u(n^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Cele 10 pătrate ale numerelor considerate inițial vor fi astfel de forma $M_{10} + r$, cu $r \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Alegând 7 pătrate, cel puțin două vor da același rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor este divizibilă cu 10.

3. Demonstrați că oricare ar fi 12 numere naturale distincte de două cifre, dintre ele se pot alege două a căror diferență este un număr format din două cifre identice.

Soluție: Un număr n format cu două cifre identice \overline{aa} , se scrie $n = 11a$, $1 \leq a \leq 9$. Dintre cele 12 numere, două vor avea același rest

la împărțirea cu 11. Fie acestea \overline{xy} și \overline{zt} . Astfel, diferența lor va fi divizibilă cu 11, deci există c număr natural, $c < 10$ (fiecare cât obținut la împărțirea numerelor la 11 este mai mic decât 10, altfel numerele au mai mult de 2 cifre) pentru care $\overline{xy} - \overline{zt} = 11c = \overline{cc}$.

4. Fie M un sistem format din n numere întregi (nu neapărat distincte). Arătați că M are cel puțin o parte nevidă a sa cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n .

Soluție: Fie $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $x_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$.

Considerăm părțile lui M :

$$M_1 = (x_1), M_2 = (x_1, x_2), \dots, M_n = M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

și, pentru fiecare dintre ele, scriem suma elementelor sale:

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Dacă una dintre aceste sume este divizibilă cu n , problema este rezolvată.

Dacă S_i nu este divizibilă cu n , pentru $1 \leq i \leq n$, atunci două dintre aceste sume vor avea la împărțirea cu n același rest (sunt n numere și $n-1$ valori nenule posibile pentru resturile lor). Fie S_t și S_l , (unde putem presupune $t > l$), astfel ca $n \mid S_t - S_l$.

Atunci, cum $n \mid x_{l+1} + x_{l+2} + \dots + x_t$, putem alege ca parte a lui M care verifică proprietatea cerută sistemul alcătuit din $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_t$.

5. Dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este egal cu 0.

Soluție: Determinantul are în total n^2 elemente; astfel, $n-2$ elemente ale sale sunt diferite de valoarea comună a celor $n^2 - n + 2$ elemente egale.

Cele $n-2$ numere pot fi distribuite pe cel mult $n-2$ linii sau coloane ale determinantului. Obținem astfel că, cel puțin două linii sau coloane ale determinantului sunt identice, deci valoarea sa este egală cu 0.

6. Fie 9 puncte în interiorul unui pătrat de latură 1. Arătați că există trei puncte dintre acestea care să fie vârfurile unui triunghi de arie cel mult $\frac{1}{8}$.

Soluție: Unind două câte două mijloacele laturilor opuse ale pătratului obținem patru pătrate de latură $\frac{1}{2}$.

Dintre acestea, în cel puțin unul vor exista cel puțin trei puncte din cele 9 considerate inițial. Notăm acest pătrat cu $ABCD$ iar punctele cu M, N, P . Dacă

M, N și P sunt coliniare, $S_{\triangle MNP} = 0 < \frac{1}{8}$.

Dacă nu, ducem prin cele trei puncte paralele la AD ; una dintre ele se va afla între celelalte două. Fie aceasta MM' , unde $M' \in (NP)$.

Construim, ca în figura 11.2.1., $PP' \perp MM'$ și $NN' \perp MM'$ unde $P' \in MM'$, $N' \in MM'$. Atunci,

$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle MM'N} + S_{\triangle MM'P} = \frac{1}{2} MM' (NN' + PP') \leq \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{8}.$$

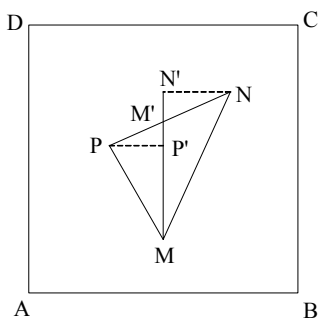


Fig. 11.2.1.

7. Se consideră un cub cu latura 1. Arătați că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție: Împărțim fiecare muchie a cubului în trei părți egale. Trasând prin aceste puncte paralele la muchii, obținem pe fiecare față a cubului câte 9 pătrate egale. Ducând plane paralele cu fețele cubului prin punctele de diviziune, am împărțit cubul inițial în 27 cuburi de latură $\frac{1}{3}$ fiecare. Aplicând principiul lui Dirichlet, cel puțin două puncte

din cele inițiale se vor afla într-un cub de latură $\frac{1}{3}$. Distanța dintre

cele două puncte nu poate fi mai mare decât lungimea diagonalei acestui cub, deci este $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Principiul includerii și excluderii

Principiul includerii și excluderii:

Se consideră n mulțimi finite A_i , $1 \leq i \leq n$. Atunci:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|. \quad (1)$$

Demonstrație: Pentru a arăta că relația (1) este adevărată pentru orice $n \geq 1$ număr natural, aplicăm metoda inducției matematice după n .

Pentru $n = 1$, afirmația este evident adevărată. Chiar dacă nu mai este necesar să verificăm pentru $n = 2$, cum vom folosi explicit formula pentru $n = 2$, să observăm că, în acest caz, numărul elementelor reuniunii $A_1 \cup A_2$ este egal cu suma cardinalelor celor două mulțimi din care trebuie să scădem numărul elementelor comune care au fost numărate de două ori. Am demonstrat astfel că:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Presupunem relația (1) adevărată pentru n mulțimi finite și arătăm că ea rămâne adevărată și pentru $n + 1$ astfel de mulțimi.

Cum $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1}$, obținem:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right| = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| - \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right|. \end{aligned}$$

Deoarece:

$$(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) = (A_i \cap A_j) \cap A_{n+1},$$

$$(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1}) = (A_i \cap A_j \cap A_k) \cap A_{n+1}, \text{ etc.,}$$

aplicăm pentru calcularea lui $\left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right|$ formula (1) și rezultă:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \right|. \end{aligned}$$

Înlocuind în relația anterioară, vom obține:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \right|.$$

1. Câte numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 3, cu 4, sau cu 5?

Soluție: Formăm mulțimile:

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}^*, 3k \leq 1000\},$$

$$B = \{4k \mid k \in \mathbb{N}^*, 4k \leq 1000\},$$

$$C = \{5k \mid k \in \mathbb{N}^*, 5k \leq 1000\}$$

și trebuie să determinăm $|A \cup B \cup C|$.

Pentru aceasta, observăm mai întâi că:

$$|A| = \left\lceil \frac{1000}{3} \right\rceil = 333, \quad |B| = \left\lceil \frac{1000}{4} \right\rceil = 250, \quad |C| = \left\lceil \frac{1000}{5} \right\rceil = 200,$$

$$A \cap B = \{12k \mid k \in \mathbb{N}^*, 12k \leq 1000\}, \quad |A \cap B| = \left\lceil \frac{1000}{12} \right\rceil = 83,$$

$$A \cap C = \{15k \mid k \in \mathbb{N}^*, 15k \leq 1000\}, \quad |A \cap C| = \left\lceil \frac{1000}{15} \right\rceil = 66,$$

$$B \cap C = \{20k \mid k \in \mathbb{N}^*, 20k \leq 1000\}, |B \cap C| = \left\lceil \frac{1000}{20} \right\rceil = 50,$$

$$A \cap B \cap C = \{60k \mid k \in \mathbb{N}^*, 60k \leq 1000\}, |A \cap B \cap C| = \left\lceil \frac{1000}{60} \right\rceil = 16.$$

Înlocuind aceste rezultate în formula:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

rezultă: $|A \cup B \cup C| = 600$.

2. Fie A și B două mulțimi finite cu m , respectiv n elemente unde $m \geq n$. Stabiliți câte funcții surjective $f: A \rightarrow B$ se pot construi.

Soluție: Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Știm că numărul funcțiilor f definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este de n^m . Notăm cu x numărul funcțiilor care nu sunt surjective; astfel numărul funcțiilor surjective va fi egal cu $n^m - x$.

Pentru fiecare $1 \leq i \leq n$, definim mulțimea:

$$M_i = \{f: A \rightarrow B \mid b_i \notin f(A)\}.$$

Deci, $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ coincide cu mulțimea funcțiilor $f: A \rightarrow B$ care nu sunt surjective. Pentru $1 \leq i \leq n$, M_i este de fapt mulțimea funcțiilor ce se pot construi din mulțimea A în mulțimea $B \setminus \{b_i\}$ și astfel, $|M_i| = (n-1)^m$. La fel, $M_i \cap M_j$ este mulțimea funcțiilor care se construiesc din A în mulțimea $B \setminus \{b_i, b_j\}$ deci, $|M_i \cap M_j| = (n-2)^m$, etc.

Se observă că $\bigcap_{i=1}^n M_i = \emptyset$.

Folosind principiul includerii și excluderii, obținem:

$$\begin{aligned} x = \left| \bigcup_{i=1}^n M_i \right| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \\ &- \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n M_i \right| = C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că numărul funcțiilor surjective este egal cu:

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$$

3. Fie A o mulțime finită cu m elemente. Notăm cu $N_{m,k}$ numărul relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe mulțimea A astfel încât mulțimea cât (a claselor de echivalență) să aibă k elemente ($k \leq m$).

Arătați că:

$$N_{m,k} = \frac{1}{k!} \cdot [k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}]$$

și deduceți numărul relațiilor de echivalență ce se pot defini pe mulțimea A .

Soluție: Considerăm o relație de echivalență definită pe mulțimea A pe care o notăm cu ρ iar pentru $x \in A$, \hat{x} va reprezenta clasa de echivalență corespunzătoare relației ρ . Fie $A_\rho = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ mulțimea cât. Atunci funcția $p: A \rightarrow A_\rho$, $p(x) = \hat{x}$ este surjectivă.

Reciproc, dacă funcția $f: A \rightarrow B$ este surjectivă, putem arăta ușor că relația definită prin $(x, y) \in \rho_f \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ este relație de echivalență pe A . Mai mult, dacă $g: B \rightarrow C$ este o funcție bijectivă, relațiile ρ_f și $\rho_{g \circ f}$ coincid pentru că:

$$(x, y) \in \rho_{g \circ f} \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow (\text{ținând cont că } g \text{ este funcție bijectivă}) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_f.$$

În cazul nostru vom considera $B = A_\rho$, deci va avea k elemente. Atunci, pe baza observației făcute, $k!$ funcții surjective din A în A_ρ vor determina aceeași relație de echivalență pe A . Aplicând rezultatul obținut în problema precedentă,

$$N_{m,k} = \frac{1}{k!} \cdot [k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}].$$

Numărul relațiilor de echivalență care pot fi definite pe mulțimea A este atunci egal cu $N_{m,1} + N_{m,2} + \dots + N_{m,m}$.

4. Aflați în câte moduri se pot împărți 5 obiecte distincte la 3 persoane, cu condiția ca fiecare persoană să primească cel puțin un obiect.

Soluție: Fiecare corespondență construită între mulțimea obiectelor și cea a persoanelor care îndeplinesc condiția din enunț este de fapt o funcție surjectivă definită pe o mulțime cu 5 elemente și cu valori într-o mulțime de 3 elemente. Astfel, numărul cerut este numărul de funcții surjective ce se pot construi între cele două mulțimi.

Conform exercițiului 2., obținem $3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 + C_3^2 = 150$ moduri.

5. Se consideră n puncte în plan care se unesc între ele prin segmente astfel încât să nu existe un triunghi cu vârfurile în cele n puncte. Să se arate că în acest caz există cel puțin un punct care este extremitatea a cel mult $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ segmente.

Soluție: Fie P mulțimea formată cu cele n puncte din plan. Pentru $M \in P$, notăm cu A_M mulțimea punctelor din P legate de M printr-un segment.

Prin reducere la absurd, facem presupunerea că, pentru orice punct $M \in P$, $|A_M| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. Fie $M_1 \in P$ și $N \in A_{M_1}$. Atunci,

$$n \geq |A_{M_1} \cup A_N| = |A_{M_1}| + |A_N| - |A_{M_1} \cap A_N| \geq 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 - |A_{M_1} \cap A_N|.$$

Rezultă că:

$$|A_{M_1} \cap A_N| \geq 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 - n > 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 - 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 = 0,$$

deci există cel puțin un punct $R \in A_{M_1} \cap A_N$. Am obținut astfel trei puncte M_1 , N și R din mulțimea P care sunt legate între ele prin segmente, adică triunghiul M_1NR are vârfurile în mulțimea P , fapt ce contrazice ipoteza. Presupunerea făcută fiind eronată, există cel puțin un punct M din P pentru care $|A_M| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

6. Fie σ o permutare de n elemente. Spunem că σ admite o coincidență în i dacă $\sigma(i) = i$. Determinați numărul N de permutări fără coincidențe din S_n .

Soluție: Notăm cu A_i mulțimea permutărilor de n elemente care au o coincidență doar în i . Astfel, $|A_i| = (n-1)!$.

Notăm cu S numărul permutărilor cu cel puțin o coincidență, adică:

$$S = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| = C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n.$$

Pentru a afla numărul permutărilor fără coincidențe, din numărul total de permutări, $n!$, scădem numărul S și obținem:

$$N = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n.$$

3. Probleme de loc geometric

Chiar dacă noțiunea de loc geometric nu-și mai găsește locul pe care îl merită în programele școlare, considerăm că nu putem neglija acest subiect, unul dintre cele mai frumoase din geometrie. Locurile geometrice conduc la înțelegerea geometriei, la aprofundarea ei, la vizualizarea unor proprietăți geometrice referitoare la un punct într-un cadru stabilit, dezvoltă intuiția și raționamentul.

Locurile geometrice în plan sunt mulțimi de puncte care îndeplinesc o anumită condiție geometrică. Vom nota cu L mulțimea punctelor din plan care verifică proprietatea P , iar cu F figura loc geometric. A demonstra că „Locul geometric al punctelor care au proprietatea P este figura geometrică F ” presupune a arăta egalitatea celor două mulțimi, L și F , prin dublă incluziune: $L \subseteq F$ și $F \subseteq L$. Cu alte cuvinte, în plan, în afara mulțimii L , nu mai există alte puncte care să verifice condiția dată și în mulțimea F care definește locul geometric nu se găsesc puncte care să nu satisfacă condiția P .

De multe ori, enunțul unei probleme de loc geometric specifică figura loc geometric, fapt ce simplifică rezolvarea problemei, cum ar fi:

➤ Să se arate că locul geometric al punctelor M din plan care au puteri egale în raport cu două cercuri date C_1 și C_2 este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor.

➤ Bisectoarea interioară a unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului, egal depărtate de laturile unghiului.

În general, problemele de loc geometric nu precizează însă figura loc geometric. În această situație trebuie cunoscute locuri geometrice fundamentale, de referință, cum ar fi:

- mediatoarea, ca loc geometric;
- bisectoarea, ca loc geometric (cele două sunt primele locuri geometrice cu care se întâlnesc elevii, în clasa a VI-a);
- locul geometric al punctelor situate la o anumită distanță de o dreaptă;
- locul geometric al punctelor care împart segmentul (AM) într-un raport constant, unde A este fixat iar M este mobil pe o dreaptă fixată;
- locul geometric al punctelor M pentru care $MA^2 - MB^2 = ct$, cu A și B puncte fixe;
- locul geometric al punctelor din care se vede un segment dat sub un unghi precizat;
- locul geometric al punctelor M pentru care aria triunghiului ABM este constantă când A și B sunt fixe, etc.

În rezolvarea unei probleme de loc geometric se pornește cu identificarea elementelor fixe și a celor mobile ale configurației. Atunci când acestea sunt clare, se încearcă reducerea problemei (prin găsirea unor proprietăți caracteristice ale punctelor locului) la unul din locurile geometrice cunoscute; în final, se stabilește figura loc geometric.

Pentru aceasta, arătăm că:

- 1) Orice punct al figurii F are proprietatea cerută P , deci $F \subseteq L$;
- 2) Orice punct din plan care are proprietatea P aparține figurii, adică $L \subseteq F$.

Dacă se demonstrează doar prima afirmație, înseamnă că am găsit o mulțime de puncte (cele ale figurii F) care aparțin locului geometric,

fără a putea fi siguri că acestea sunt singurele care verifică proprietatea menționată în problemă.

Dacă se demonstrează doar a doua afirmație, vom obține că toate punctele cu proprietatea P aparțin figurii, fără a putea preciza dacă nu există puncte ale figurii care nu au proprietatea P .

Uneori se pot folosi forme echivalente ale celor două afirmații, și anume:

1') Price punct care nu are proprietatea P , nu aparține figurii F ;

2') Orice punct care nu aparține lui F nu are proprietatea P .

Pentru a determina figura F , mai întâi ne asigurăm că există cel puțin un punct cu proprietatea P ; apoi considerăm un punct oarecare M din plan care are proprietatea P și căutăm o proprietate echivalentă lui P care să stabilească apartenența lui M la o figură F . De cele mai multe ori vom construi, cu mare precizie, un număr suficient de astfel de puncte M , pentru a putea „intui” care este locul geometric. Dacă demonstrăm afirmația 2), deducem că M se află pe o anumită curbă; pentru a arăta că aceasta este locul geometric căutat, demonstrăm apoi 1) sau 1').

Locul geometric poate fi conceput și cinematic, bazat pe mișcare. Putem considera un punct mobil care păstrează, pe tot parcursul mișcării, proprietatea P generând locul geometric. Astfel, punctul M coincide pe rând cu punctele locului, definit mai întâi static, ca mulțime de puncte. În acest caz, putem defini locul geometric ca fiind figura plană descrisă de punctul mobil M , care satisface o anumită condiție (proprietate) dată.

1. Care este locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC când A și B sunt puncte fixe pe un cerc $C(O, r)$, iar C este un punct variabil pe același cerc?

Soluție: Trasând mai multe puncte ale locului geometric, observăm că punctul G descrie un cerc. Pentru a găsi locul cerut, notăm cu

A_1 mijlocul laturii AB ; fie $O_1 \in (OA_1)$, cu $A_1O_1 = \frac{1}{3}A_1O$.

Atunci, $\Delta A_1GO_1 \sim \Delta A_1CO$ și $GO_1 = \frac{1}{3} \cdot CO = \frac{r}{3} = ct.$

Punctul O_1 fiind fix, rezultă că centrul de greutate G se află pe cercul $C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right)$. (Fig. 11.4.1.)

Trebuie remarcat că triunghiul ABC nu există pentru situațiile:

$$C = A \text{ și } C = B.$$

Deci, din cercul găsit, vom elimina punctele corespunzătoare acestor cazuri. Ele sunt punctele în care cercul $C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right)$ intersecțiază segmentul AB și le notăm cu S și T .

Folosind notațiile anterioare, am arătat până acum că:

$$L \subseteq C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right) \setminus \{S, T\} = F.$$

Pentru a încheia demonstrația, rămâne să arătăm că fiecare punct din F este centru de greutate al unui triunghi ABC cu vârful C pe cercul mare.

Fie $G_1 \in C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right) \setminus \{S, T\}$ ales

arbitrar. Pe semidreapta (A_1G_1) considerăm punctul C_1 (figura 11.4.2.)

astfel încât $A_1C_1 = 3A_1G_1$. Din construcție, $\frac{A_1G_1}{A_1C_1} = \frac{A_1O_1}{A_1O} = \frac{1}{3}$, astfel triunghiurile $A_1G_1O_1$ și A_1C_1O sunt asemenea. De aici, $C_1O = 3O_1G_1 = r$, adică $C_1 \in C(O, r)$.

Cum C_1A_1 este mediană a triunghiului AC_1B și $\frac{A_1G_1}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$, rezultă că G_1 este centrul de greutate al triunghiului ABC_1 .

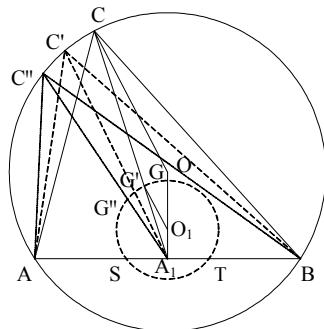


Fig. 11.4.1.

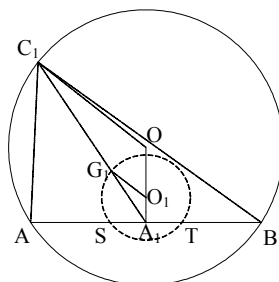


Fig. 11.4.2.